10

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 11 februarie 2023
Clasa a X – a

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE şi NOTARE:

Problema 1: soluție orientativă	**Punctaj**
a) Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[100]{x}+\sqrt[100]{x+2}$, care este strict crescătoare pe $[0,\infty)$, deci injectivă.	1p
Din prima ecuație a sistemului rezultă $f(x)=f(y-2)$, deci $x=y-2$, ceea ce conduce la $x^2+3x-4=0$ cu soluțiile $x=1$ care convine și $x=-4$ care nu convine.	1p
Atunci $y=3$ și soluția sistemului este $(1,3)$.	1p
b) Din condițiile de existență, $x\in(0,\infty)$. Folosind egalitatea $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$ adevărată pentru orice $a,b,c>0$, $b\neq 1$, ecuația se mai poate scrie: $3^{\log_5 x}+x=2+16\log_5 x$ sau, echivalent, $5^t+3^t=2+16t$ (1), dacă notăm $t=\log_5 x\in\mathbb{R}$.	2p
Considerăm funcțiile: $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(t)=5^t+3^t$, $\forall t\in\mathbb{R}$, $g(t)=16t+2$, $\forall t\in\mathbb{R}$. *f* este funcție strict convexă (sumă de două funcții exponențiale, deci strict convexe), iar *g* este funcție de gradul întâi, deci ecuația (2) : $f(t)=g(t)$ are cel mult două soluții.	1p
Se observă că *t*=0 și *t*=2 sunt soluții ale ecuației (2) și, din afirmația precedentă, singurele soluții. Atunci *x*=1>0 și *x*=25>0 sunt toate soluțiile ecuației date.	1p

Problema 2: soluție orientativă	**Punctaj**
a) $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)\Rightarrow(a+b+c)^3=(a+b)^3+c^3+3(a+b)c(a+b+c)=$	1p
$=a^3+b^3+3ab(a+b)+c^3+3c(a+b)(a+b+c)=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(ab+ac+bc+c^2)=$	1p
$=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$	1p
b) $\sqrt[3]{5-2x}+\sqrt[3]{x^2+x+2}+\sqrt[3]{-x^2+x-1}=\sqrt[3]{6}\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{5-2x}+\sqrt[3]{x^2+x+2}+\sqrt[3]{-x^2+x-1}\right)^3=\left(\sqrt[3]{6}\right)^3$	1p
$\Leftrightarrow(5-2x)+(x^2+x+2)+(-x^2+x-1)+$ $+3\left(\sqrt[3]{5-2x}+\sqrt[3]{x^2+x+2}\right)\left(\sqrt[3]{5-2x}+\sqrt[3]{-x^2+x-1}\right)\left(\sqrt[3]{x^2+x+2}+\sqrt[3]{-x^2+x-1}\right)=6\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{5-2x}+\sqrt[3]{x^2+x+2}\right)\left(\sqrt[3]{5-2x}+\sqrt[3]{-x^2+x-1}\right)\left(\sqrt[3]{x^2+x+2}+\sqrt[3]{-x^2+x-1}\right)=0$	2p
$x\in\left\{-\frac{1}{2},\ \frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}\right\}$	1p

B-dul Eroilor nr. 4-6,
Pitești, Jud. Argeș,
Tel: +40 (0)248 218 319
Fax: +40 (0)248 219 743
www.isjarges.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30,
Sector 1, 010168, București
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro

Problema 3: soluție orientativă	**Punctaj**
a) i) Fie $A(a),B(b),C(c),D(d),M(m),H_1(h_1),H_2(h_2),H_3(h_3),H_4(h_4),E(e),F(f)$. $H_1(h_1)$ este ortocentrul $\Delta MAB \Rightarrow h_1=m+a+b$, conform teoremei lui Sylvester. Analog celelalte: $h_2=m+b+c, h_3=m+c+d, h_4=m+d+a$. Astfel se verifică $h_1+h_3=h_2+h_4$, adică $H_1H_2H_3H_4$ paralelogram.	**2p**
ii) $E(e)$ este mijlocul lui $AB \Rightarrow e=\frac{a+b}{2}$. $F(f)$ este mijlocul lui $CD \Rightarrow f=\frac{c+d}{2}$ și atunci $H_1H_3=\lvert h_1-h_3\rvert=2\lvert e-f\rvert=2EF$.	**1p**
b) $\lvert x^3+y^3+z^3-3xyz\rvert=\lvert (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\rvert=$ $=\lvert x+y+z\rvert\cdot\lvert x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\rvert=\frac{1}{2}\lvert x+y+z\rvert\cdot\left\lvert (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right\rvert\le$ $\le\frac{1}{2}\lvert x+y+z\rvert\cdot\left(\lvert (x-y)^2\rvert+\lvert (y-z)^2\rvert+\lvert (z-x)^2\rvert\right)\le$ $\le\frac{1}{2}\lvert x+y+z\rvert\cdot\left(x\bar{x}-x\bar{y}-y\bar{x}+y\bar{y}+y\bar{y}-y\bar{z}-z\bar{y}+z\bar{z}+z\bar{z}-z\bar{x}-x\bar{z}+x\bar{x}\right)$ (1).	**1p**
Din ipoteză, $x\bar{x}+y\bar{y}+y\bar{y}+z\bar{z}+z\bar{z}+x\bar{x}=2$, deci (1) devine $\lvert x^3+y^3+z^3-3xyz\rvert\le\frac{1}{2}\lvert x+y+z\rvert\cdot\left\lvert 2-x(\bar{y}+\bar{z})-y(\bar{z}+\bar{x})-z(\bar{x}+\bar{y})\right\rvert=$ $=\frac{1}{2}\lvert x+y+z\rvert\cdot\left\lvert 2-x(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})+x\bar{x}-y(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})+y\bar{y}-z(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})+z\bar{z}\right\rvert=$ $=\frac{1}{2}\lvert x+y+z\rvert\cdot\left\lvert 3-(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})(x+y+z)\right\rvert=\frac{1}{2}\lvert x+y+z\rvert\cdot\left\lvert 3-\lvert x+y+z\rvert^2\right\rvert$.	**2p**
Notând $r=\lvert x+y+z\rvert$, se observă că $\frac{r}{2}(3-r^2)\le 1\Leftrightarrow (r-1)^2(r+2)\ge 0$, care este adevărată pentru orice $r\ge 0$. De aici se deduce că $\lvert x^3+y^3+z^3-3xyz\rvert\le 1$.	**1p**

Problema 4: soluție orientativă	**Punctaj**
Pentru $x=0$ obținem $f(f(y))=(1+y)f(0)+1,\ \forall y\in\mathbb{R}$ (1).	**1p**
Cazul 1: Dacă $f(0)=0\Rightarrow f(f(y))=1,\forall y\in\mathbb{R}$, dar pentru $y=0$ obținem 0=1 - fals, deci cazul 1 nu convine.	**1p**
Cazul 2: Dacă $f(0)\ne 0$, considerăm funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(y)=yf(0)+f(0)+1,\ \forall y\in\mathbb{R}$ și cum g este funcție de gradul I, g este bijectivă. Pe de altă parte, $f\circ f=g$. Injectivitatea lui g stabilește injectivitatea lui f (din dreapta compunerii) și surjectivitatea lui g stabilește surjectivitatea lui f (din stânga compunerii). Astfel f este funcție bijectivă.	**1p**

B-dul Eroilor nr. 4-6,
Pitești, Jud. Argeș,
Tel: +40 (0)248 218 319
Fax: +40 (0)248 219 743
www.isjarges.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30,
Sector 1, 010168, București
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro

Pentru $y=-1$, relația din enunț devine: $f\left(x+f\left(-1-x\right)\right)=1,\ \forall x\in\mathbb{R}$ (2) Pentru $y=-1$, relația (1) devine: $f\left(f\left(-1\right)\right)=1$ și folosind (2) se obține: $f\left(x+f\left(-1-x\right)\right)=f\left(f\left(-1\right)\right)$, din care, folosind injectivitatea lui *f*, se deduce că $x+f\left(-1-x\right)=f\left(-1\right),\forall x\in\mathbb{R}$. Înlocuim x cu -1-x și obținem $f\left(x\right)=x+1+f\left(-1\right),\ \forall x\in\mathbb{R}$. De aici, pentru $x=0$, obținem $f\left(0\right)=1+f\left(-1\right)$ (3), deci $f\left(x\right)=x+f\left(0\right),\ \forall x\in\mathbb{R}$.	**2p**
Din relația din ipoteză, pentru $x=-1$ și $y=0$, se obține $f\left(-1+f\left(0\right)\right)=f\left(-1\right)+1$ și, utilizând relația (3), împreună cu $f\left(f\left(-1\right)\right)=1$, deducem că $f\left(-1\right)=0$, ceea ce duce la $f\left(0\right)=1$ și la $f\left(x\right)=x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$ - funcția căutată.	**1p**
Verificarea enunțului și unicitatea soluției.	**1p**

Notă: Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.

V3