10

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 11 februarie 2023
Clasa a X - a

SUBIECTE:

1. a) Rezolvați sistemul de ecuații $\begin{cases} \sqrt[100]{x}+\sqrt[100]{x+2}=\sqrt[100]{y}+\sqrt[100]{y-2} \\ x+y+x^2+y^2=14 \end{cases}$

(3p)

b) Rezolvați ecuația $x^{log_5 3}+x=2+16log_5 x$.

(4p)

2. a) Demonstrați că $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a),\ \forall a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$.

(3p)

b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt[3]{5-2x}+\sqrt[3]{x^2+x+2}+\sqrt[3]{-x^2+x-1}=\sqrt[3]{6}$.

(4p)

3. a) Fie *ABCD* un patrulater inscriptibil și *M* un punct pe cercul circumscris acestuia, diferit de vârfurile patrulaterului. Fie H_1, H_2, H_3, H_4 ortocentrele triunghiurilor *MAB*, *MBC*, *MCD*, respective *MDA*, iar E, F mijloacele segmentelor *AB*, respectiv *CD*.

i) Demonstrați că $H_1H_2H_3H_4$ este paralelogram.

ii) $H_1H_3=2EF$.

(3p)

b) Fie $x,\ y,\ z\in\mathbb{C}$ cu proprietatea $|x|^2+|y|^2+|z|^2=1$. Să se arate că $|x^3+y^3+z^3-3xyz|\le 1$.

(4p)

4. . Determinați funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că $f\left(x+f\left((1+x)y\right)\right)=(1+y)f(x)+1$ pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

(7p)

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.
Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.
Timp de lucru: 3 ore.

V3