11

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 11 februarie 2023
Clasa a XI – a

V3

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE şi NOTARE:

Problema 1: soluție orientativă	**Punctaj**
a) Demonstrează egalitatea prin calcul elementar. $\left(A^2 - \mathrm{Tr}(A)\cdot A + \det A\cdot I_2 = O_2\right)$ **teorema Cayley-Hamilton**	**1p**
b) Căutăm $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{Q})$, cu $\begin{cases} a+d=0 \\ ad-bc=-7\end{cases}$.	**1p**
Găsirea unei soluții (spre exemplu $a=1,\ d=-1,\ b=2$ și $c=3$) conduce la $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1\end{pmatrix}$, care verifică cerința problemei.	**2p**
c) Din relația $\det\left(X^2-7I_2\right)=0 \Rightarrow \det\left(X-\sqrt{7}I_2\right)\cdot\det\left(X+\sqrt{7}I_2\right)=0$, deci $\begin{cases}\det\left(X-\sqrt{7}I_2\right)=0 \\ \text{sau} \\ \det\left(X+\sqrt{7}I_2\right)=0\end{cases}$.	**1p**
Fie $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{Q})$, și $\det\left(X\pm\sqrt{7}I_2\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x\pm\sqrt{7} & y \\ z & t\pm\sqrt{7}\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (xt-yz)\pm(x+t)\sqrt{7}=-7$, de unde ținând cont că $x,\ y,\ z,\ t\in\mathbb{Q}$, obținem $\begin{cases} xt-yz=-7 \\ x+t=0\end{cases}$.	**1p**
Deci $X^2=7I_2$.	**Finalizare 1p**

Problema 2: soluție orientativă	Punctaj
a) Vom utiliza teorema lui Weierstrass. Termenul general este $x_n=\left(1+\ln\frac{n+1}{n}\right)\left(1+\ln\frac{n+2}{n+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\ln\frac{2n}{2n-1}\right)$	**1p**
Din $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\left(1+\ln\frac{2n+1}{2n}\right)\left(1+\ln\frac{2n+2}{2n+1}\right)}{\left(1+\ln\frac{n+1}{n}\right)}>1,\ \forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow$ $(x_n)_{n\ge1}$ este strict crescător **(1)**	**1p**
$\left(1+\ln\frac{2n}{2n-1}\right)^n\le x_n\le\left(1+\ln\frac{n+1}{n}\right)^n$ Din $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\ln\frac{2n}{2n-1}\right)^n=\sqrt{e}$ și $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\ln\frac{n+1}{n}\right)^n=e\Rightarrow\sqrt{e}<x_n<e,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ (2)	**1p**
Din **(1)** și **(2)**, conform teoremei lui Weierstrass, șirul este convergent.	**Finalizare 1p**
b) Demonstrează că șirul $y_n=\ln\frac{n+1}{n}\cdot\ln\frac{n+2}{n+1}\cdot\ldots\cdot\ln\frac{2n}{2n-1}$ converge către zero.	**2p**
Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+y_n)^{2023}-1}{y_n}=2023.$	**Finalizare 1p**

Problema 3: soluție orientativă	**Punctaj**
Demonstrează inductiv că $(B-A)^{n+1}=B^n\left(B-(n+1)A\right)$ $n=1\Rightarrow (B-A)^2=B^2-BA-AB+A^2=B^2-2BA+\underbrace{BA-AB}_{=-A^2}+A^2=B(B-2A)$	**2p**
$P(k)\Rightarrow P(k+1)$ $(B-A)^{k+2}=\underbrace{(B-A)^{k+1}}_{\text{ip. de inducție}}\cdot(B-A)=B^k\left(B-(k+1)A\right)\cdot(B-A)=$	**1p**
$=B^k\left(B^2-BA-(k+1)AB+(k+1)A^2\right)=$ $=B^k\left(B^2-(k+2)BA+(k+1)BA-(k+1)AB+(k+1)A^2\right)=$ $=B^k\left(B^2-(k+2)BA+(k+1)\underbrace{(BA-AB)}_{=-A^2}+(k+1)A^2\right)=$	**2p**
$=B^k\left(B^2-(k+2)BA\right)=B^{k+1}\left(B-(k+1)A\right)$ și procedeul inducției matematice este finalizat.	**1p**
Pentru $n=2023\Rightarrow (B-A)^{2024}=B^{2023}(B-2024A)$.	**Concluzie 1p**

Problema 4: soluție orientativă	**Punctaj**
Fie $D=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & x & \frac{1}{2}-x\\ \frac{1}{2}-x & \frac{1}{2} & x\\ x & \frac{1}{2}-x & \frac{1}{2}\end{vmatrix}$. (Cum $\det A=\det A^t$, puteau lua și forma matricei transpuse.) Prin calcul, adunând spre exemplu toate liniile la prima linie rezultă	**2p**
$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \frac{1}{2}-x & \frac{1}{2} & x\\ x & \frac{1}{2}-x & \frac{1}{2}\end{vmatrix}\overset{(-1)c_1+c_2}{\underset{(-1)c_1+c_2}{=}}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{1}{2}-x & x & 2x-\frac{1}{2}\\ x & \frac{1}{2}-2x & \frac{1}{2}-x\end{vmatrix}=$	**1p**

$=(-1)^{1+1}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} x & 2x-\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}-2x & \frac{1}{2}-x \end{vmatrix}=x\left(\frac{1}{2}-x\right)-\left(2x-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-2x\right)=$ $=\frac{1}{2}x-x^2+\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{x}{2}-x^2+4x^2-2x+\frac{1}{4}=3x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}$ şi cum funcţia de gradul al doilea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}$ are $\left.\begin{array}{l} a=3>0 \\ \Delta=\frac{9}{4}-4\cdot 3\cdot\frac{1}{4}=\frac{9}{4}-\frac{12}{4}=-\frac{3}{4}<0 \end{array}\right\}\Rightarrow f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.	**1p** **1p**
b) $\min_{x=-\frac{b}{2a}} f(x)=-\frac{\Delta}{4a}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{4\cdot 3}{1}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4\cdot 3}=\frac{1}{16}$.	**2p**

Notă: Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.