

5

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală, 11 februarie 2023
Clasa a V – a

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE și NOTARE:

Problema 1: soluție orientativă	Punctaj
a)	
$A = (3^2 \cdot 7)^n + 7^{n+1} \cdot 3^{2n+1} - (3 \cdot 7)^n \cdot 3^{2+n}$ $A = 3^{2n} \cdot 7^n + 7^{n+1} \cdot 3^{2n+1} - 3^{2+2n} \cdot 7^n$ $A = 3^{2n} \cdot 7^n (1 + 7 \cdot 3 - 3^2)$ $A = 3^{2n} \cdot 7^n \cdot 13$	1p
$B = (3 \cdot 5)^{n+1} + 3^{n+1} \cdot 5^{n+2} + 3^3 \cdot (3 \cdot 5)^n$ $B = 3^{n+1} \cdot 5^{n+1} + 3^{n+1} \cdot 5^{n+2} + 3^{3+n} \cdot 5^n$ $B = 3^{n+1} \cdot 5^n (5 + 5^2 + 3^2)$ $B = 3^{n+1} \cdot 5^n \cdot 39 = 3^{n+1} \cdot 5^n \cdot 3 \cdot 13 = 3^{n+1} \cdot 5^n \cdot 13$	1p
Deoarece, $A = 3^{2n} \cdot 7^n \cdot 13$ iar $B = 3^{n+1} \cdot 5^n \cdot 13$, $A + B = 3^n \cdot 13(21^n + 9 \cdot 5^n)$	2p
b)	
Dacă $n = 0$, ultima cifră a lui B este 7	1p
Dacă $n \geq 1$, ultima cifră a lui B este 5	2p

Problema 2: soluție orientativă	Punctaj
a)	
$216 = 125 + 64 + 27$ $216 = 5^3 + 4^3 + 3^3$	2p
Numerele căutate sunt 5, 4, 3	1p
b)	
$6^{45^2} = 6^{2025}$	1p
$6^{45^2} = 6^{2022} \cdot 216$	1p
$6^{45^2} = 6^{2022} \cdot (5^3 + 4^3 + 3^3)$	1p
$6^{45^2} = (6^{674} \cdot 5)^3 + (6^{674} \cdot 4)^3 + (6^{674} \cdot 3)^3$	1p

Problema 3: soluție orientativă	Punctaj
Fie \overline{abc} numărul și \overline{cba} răsturnatul său.	1p
Alegem $a > c$ și obținem $\overline{abc} - \overline{cba} = 100a + 10b + c - (100c + 10b + a)$	1p
$\overline{abc} - \overline{cba} = 100(a - c) - (a - c) = (a - c)00 - (a - c)$	1p
$\overline{abc} - \overline{cba} = (a - c - 1)9(10 - a + c)$	1p
Dacă a și c sunt numere consecutive, atunci $a = c + 1$ și $\overline{abc} - \overline{cba} = 99$	1p
$\Rightarrow 99 + 99 = 198$	1p
Dacă a și c nu sunt consecutive $\Rightarrow (a - c - 1)9(10 - a + c) + (10 - a + c)9(a - c - 1) = 1089$	1p

Problema 4: soluție orientativă	Punctaj
Cum $a \cdot b \cdot c = 2^{2023}$, distingem următoarele cazuri: a) $a = 1, b = 2, c = 2^{2022} \Rightarrow U(3^a + 3^b + 3^c) = 3$, care nu convine b) $a = 2, b = 2^m, c = 2^n, m, n \geq 2 \Rightarrow U(3^a + 3^b + 3^c) = 1$, care nu convine c) $a = 2^m, b = 2^n, c = 2^p, m, n, p \geq 2 \Rightarrow U(3^a + 3^b + 3^c) = 3$, care nu convine d) $a = 1, b = 2^m, c = 2^n, m, n \geq 2 \Rightarrow U(3^a + 3^b + 3^c) = 5$, care convine Astfel există tripletele de forma $(1, 2^m, 2^n), m < n, m, n \geq 2$ care verifică condiția $U(3^a + 3^b + 3^c) = 5$	4p
Vom căuta printre tripletele de mai sus pe cele care verifică relația $a \cdot b \cdot c = 2^{2023}$ Acestea sunt: $(1, 2^2, 2^{2021}), (1, 2^3, 2^{2020}), \dots, (1, 2^{1011}, 2^{1012}) \Rightarrow 1010$ numere care verifică condițiile din enunț	3p

Notă: Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.