6

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 11 februarie 2023
Clasa a VI – a

V3

SUBIECTE:

1. Considerăm o mulțime A de numere naturale cu următoarele proprietăți:
(1) 1 ∈ A;
(2) dacă x ∈ A, atunci 6x ∈ A;
(3) dacă x ∈ A, atunci x + 7 ∈ A.
Demonstrați că 2022 ∈ A. **(7p)**

2. Se consideră numerele naturale nenule x, y, z care îndeplinesc simultan condițiile:
$\frac{xy+zy}{2xz} = \frac{66}{35}$; $\frac{3zy}{x^2+xz} = \frac{55}{28}$; $\frac{3z^3}{x^2y+xyz} = \frac{125}{308}$ și $x^2 + y^2 + z^2 = 4875$.
Calculați numărul $a = 404(x+z-y)+3$. **(7p)**

3. În cercul C(O, R) se consideră diametrul AB și C mijlocul arcului AB. Punctul M se află pe arcul mic BC (M diferit de B și C), N se află pe arcul mic AC (N diferit de A și C), astfel încât $\sphericalangle MON = 90^0$. Punctul Q se află pe arcul AB unde C și Q sunt de o parte și de cealaltă a dreptei AB astfel încât $\sphericalangle CON \equiv \sphericalangle ABQ$.
a) Arătați că arcele mici AN și CM sunt congruente. **(4p)**
b) Arătați că dreptele NO și BQ sunt perpendiculare. **(3p)**

4. Fie unghiurile adiacente $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$, semidreapta OM bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOB$, semidreapta ON bisectoarea unghiului $\sphericalangle MOB$, iar semidreapta OP bisectoarea unghiului $\sphericalangle AON$. Știind că OP ⊥ OC și $7 \cdot \sphericalangle BOC = 10 \cdot \sphericalangle MOP$, determinați măsurile unghiurilor $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle MOP$ și $\sphericalangle AOC$.
(7p)

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.
Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.
Timp de lucru: ***2 ore****.*