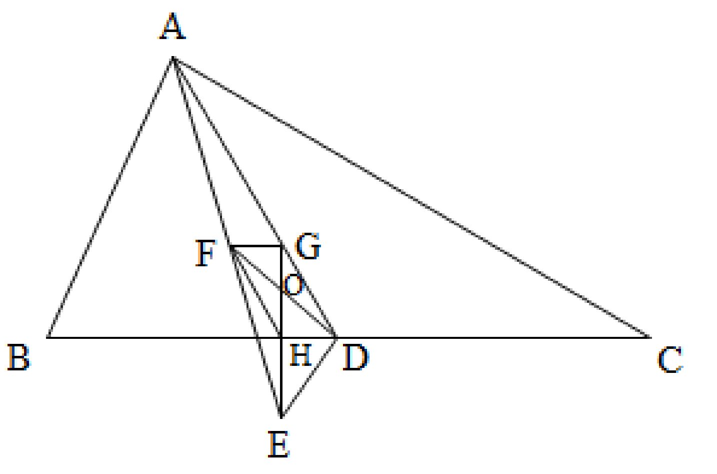
7

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 11 februarie 2023
Clasa a VII – a

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE şi NOTARE:

Problema 1: soluție orientativă	**Punctaj**
$\left(2+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)=2\sqrt{3}-2+3-\sqrt{3}=\sqrt{3}+1$	**2p**
$\sqrt{\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)^2}=\left\|2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right\|=3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\Rightarrow a=3\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$	**1p**
$\left(\frac{3}{\sqrt{3}}+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\cdot\sqrt{6}=3\sqrt{2}+3\sqrt{3}$	**1p**
$\left(\frac{1}{\sqrt{12}}+\frac{1}{\sqrt{8}}\right)\cdot\sqrt{24}=\sqrt{2}+\sqrt{3}\Rightarrow b=2\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$	**1p**
$\sqrt{x}<a\cdot b\Leftrightarrow\sqrt{x}<6\Rightarrow x\in\{0,1,2,...,35\}$	**2p**

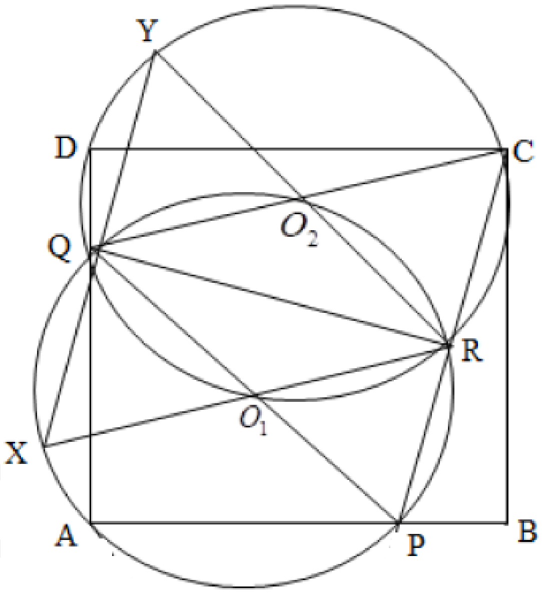
Problema 2: soluție orientativă	**Punctaj**
a) În AEG, HF este linie mijlocie $\Rightarrow HF \parallel AG$ și $AG=2\cdot HF$ (1)	**1p**
Din G centrul de greutate $\triangle ABC\Rightarrow AG=2\cdot GD$ (2).	**1p**
Din (1) și (2), obținem că $HF=GD$ și cum $HF\parallel GD\Rightarrow GDHF$ este paralelogram	**1p**
b) Avem $A_{\triangle HGF}=A_{\triangle HFE}=A_{\triangle HGD}=A_{\triangle HED}$ cu justificare!	**1p**
Obținem că $A_{GDHF}=A_{\triangle GFE}=\frac{A_{\triangle GAE}}{2}\Rightarrow A_{\triangle GAE}=2\cdot A_{GDHF}$ și $A_{GDHF}=A_{\triangle GDE}$	**1p**
Atunci $3\cdot A_{GDHF}=A_{\triangle GAE}+A_{\triangle GDE}=A_{\triangle AED}$	**1p**
$GDHF$ paralelogram și O centrul său, obținem că $A_{GDHF}=4\cdot A_{\triangle FOG}\Rightarrow 12\cdot A_{\triangle FOG}=A_{\triangle AED}$. de unde concluzia.	**1p**



Problema 3: soluție orientativă	Punctaj
Determinăm $a,b\in\{1,2,3,...,2023\}$, $a\neq b$ astfel încât $\frac{a^2-2a+5}{a^2+1}=\frac{b^2-2b+5}{b^2+1}$.	1p
Avem $\frac{a^2-2a+5}{a^2+1}=\frac{b^2-2b+5}{b^2+1}\Leftrightarrow 1+\frac{4-2a}{a^2+1}=1+\frac{4-2b}{b^2+1}\Leftrightarrow\frac{2-a}{a^2+1}=\frac{2-b}{b^2+1}\Rightarrow$ $(2-a)(b^2+1)=(2-b)(a^2+1)\Leftrightarrow 2b^2+2-ab^2-a=2a^2+2-ba^2-b\Leftrightarrow$	1p
$2(b^2-a^2)-ab(b-a)+(b-a)=0\Leftrightarrow(b-a)(2b+2a-ab+1)=0$ și cum $a\neq b\Rightarrow$ $2a+2b-ab+1=0.$	2p
Avem $2a+2b-ab+1=0\Leftrightarrow 2b+1=a(b-2)$. Dacă $b=2\Rightarrow a\cdot 0=5$, care duce la un rezultat fals, deci $b\neq 2$. Din $b-2\mid 2b+1$ și $b-2\mid b-2\Rightarrow b-2\mid 5\Rightarrow b-2\in D_5=\{1,5\}\Rightarrow b\in\{3,7\}$. Obținem $(a,b)\in\{(3,7),(7,3)\}\Rightarrow\frac{3^2-2\cdot 3+5}{3^2+1}=\frac{7^2-2\cdot 7+5}{7^2+1}=\frac{4}{5}\Rightarrow$ 2 elemente din listă vor coincide, de unde obținem că lista va cuprinde 2022 de elemente distincte.	3p

Problema 4: soluție orientativă	Punctaj
a) Cum $\sphericalangle PCB=15^0$ și $\sphericalangle PBC=90^0\Rightarrow\sphericalangle CPB=75^0$ și cum $\sphericalangle QPC=60^0\Rightarrow$ $\sphericalangle APQ=45^0$.	1p
Din $\sphericalangle APQ=45^0$ și $\sphericalangle PAQ=90^0\Rightarrow\sphericalangle AQP=45^0$, deci $\triangle APQ$ dreptunghic isoscel, de unde $AP\equiv AQ$ și cum $AB\equiv AD\Rightarrow BP\equiv DQ$.	1p
Avem $\triangle CDQ\equiv\triangle CBP\ (C.C)\Rightarrow QC\equiv QP\Rightarrow\triangle QPC$ este isoscel și cum $\sphericalangle QPC=60^0\Rightarrow\triangle QPC$ este echilateral.	1p
b) Cum $\triangle QPC$ este echilateral și QR mediană, obținem că QR este înălțime. Cum $\sphericalangle QRP+\sphericalangle QAP=180^0\Rightarrow AQRP$ este inscriptibil. Analog $DQRC$ este inscriptibil.	1p
De asemenea O_1 este mijlocul lui QP și O_2 este mijlocul lui QC. Cum $O_2Q\equiv O_2R\Rightarrow\triangle O_2QR$ isoscel de bază QR și cum $\sphericalangle O_2QR=\sphericalangle O_2RQ=30^0$ $\Rightarrow\sphericalangle RO_2Q=120^0$, de unde obținem că $\sphericalangle RO_2Q+\sphericalangle QPR=120^0+60^0=180^0$ $\Rightarrow O_2RPQ$ este inscriptibil și cum $AQRP$ este inscriptibil. Obținem că punctele A,P,R,O_2,Q sunt conciclice. Analog punctele D,Q,O_1,R,C sunt conciclice.	1p

Avem că $\triangle XQO_1$ este echilateral, de unde $\sphericalangle XO_1Q = \overset{\frown}{XQ} = 60^0$ și cum $\sphericalangle QPA = \frac{\overset{\frown}{AQ}}{2}$, $\sphericalangle QPA = 45^0 \Rightarrow \overset{\frown}{AQ} = 90^0 \Rightarrow \overset{\frown}{AX} = 30^0$. Obținem că $\sphericalangle AO_2X = \frac{\overset{\frown}{AX}}{2} = 15^0$.	**1p**
Cum $\sphericalangle DCQ = \frac{\overset{\frown}{DQ}}{2} = 15^0 \Rightarrow \overset{\frown}{DQ} = 30^0$ și cum $\sphericalangle QRY = 30^0 = \frac{\overset{\frown}{YQ}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{YQ} = 60^0$ $\Rightarrow \overset{\frown}{DY} = 30^0 \Rightarrow \sphericalangle DO_1Y = \frac{\overset{\frown}{DY}}{2} = 15^0$. În concluzie $\sphericalangle AO_2X = \sphericalangle DO_1Y = 15^0 \Rightarrow \sphericalangle AO_2X \equiv \sphericalangle DO_1Y$.	**1p**



Notă: Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.