



**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapa locală, 11 februarie 2023**  
**Clasa a VII – a**

**SUBIECTE:**

1. Se consideră numerele reale  $a = (2 + \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1) - \sqrt{(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})^2} - 1$  și

$b = \left(\frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{2}}\right) \cdot \sqrt{6} - \left(\frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{1}{\sqrt{8}}\right) \cdot \sqrt{24}$ . Aflați numerele naturale  $x$ , știind că  $\sqrt{x} < a \cdot b$ .

(7p)

2. Fie  $ABC$  un triunghi ( $AB \neq AC$ ),  $G$  centrul său de greutate, punctul  $D$  mijlocul segmentului  $BC$ ,  $E$  simetricul punctului  $G$  față de dreapta  $BC$ . Considerăm punctul  $H$  intersecția dreptelor  $GE$  și  $BC$ ,  $F$  mijlocul segmentului  $AE$ , iar  $O$  intersecția dreptelor  $GE$  și  $DF$ .

a) Arătați că patrulaterul  $GDHF$  este un paralelogram.

(3p)

b) Arătați că aria triunghiului  $GOF$  reprezintă  $\frac{1}{12}$  din aria triunghiului  $AED$ .

(4p)

3. Aflați câte numere numere distincte cuprinde următoarea listă de numere:

$$\frac{1^2 - 2 \cdot 1 + 5}{1^2 + 1}, \frac{2^2 - 2 \cdot 2 + 5}{2^2 + 1}, \frac{3^2 - 2 \cdot 3 + 5}{3^2 + 1}, \dots, \frac{2023^2 - 2 \cdot 2023 + 5}{2023^2 + 1}.$$

(7p)

4. Se consideră pătratul  $ABCD$ ,  $P$  un punct pe latura  $AB$  astfel încât  $\sphericalangle PCB = 15^\circ$ ,  $R$  mijlocul segmentului  $CP$  și  $Q$  pe latura  $AD$ , astfel încât  $\sphericalangle QPC = 60^\circ$ .

a) Arătați că triunghiul  $QPC$  este echilateral.

(3p)

b) Dacă în plus,  $O_1$  este centrul cercului circumscris triunghiului  $QRP$ ,  $O_2$  centrul cercului circumscris triunghiului  $QRC$ ,  $X$  punctul diametral opus punctului  $R$ , situat pe cercul circumscris triunghiului  $QRP$  și  $Y$  punctul diametral opus punctului  $R$ , situat pe cercul circumscris triunghiului  $QRC$ , arătați că  $\sphericalangle AO_2X \equiv \sphericalangle DO_1Y$ .

(4p)

**Notă:**

*Toate subiectele sunt obligatorii.*

*Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.*

*Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.*

*Timp de lucru: 3 ore.*