8

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 11 februarie 2023
Clasa a VIII – a

V3

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE şi NOTARE:

Problema 1: soluție orientativă	**Punctaj**
$2E(x,y)=2x^2+10y^2-2xy-2x-18y+4056=x^2-2xy+y^2+x^2-2x+1+9y^2-18y+9+4046=(x-y)^2+(x-1)^2+(3y-3)^2+4046$	**2**
$E(x,y)=\frac{(x-y)^2}{2}+\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(3y-3)^2}{2}+2023$	**1**
$E(x,y)\geq 2023$, cu egalitate când $x=y=1$, deci $m=2023$	**2**
Cum $44^2<2023<45^2$ și $63^2<4046<64^2$ rezultă $\left(\sqrt{m},\sqrt{2m}\right)\cap\mathbb{N}=\{45,46,47,\dots,63\}$	**1**
Sunt 19 numere în intervalul $\left(\sqrt{m},\sqrt{2m}\right)$	**1**

Problema 2: soluție orientativă	**Punctaj**
$x^4+2=8xy-16y^4 \Leftrightarrow x^4+(2y)^4+2=8xy$	**1**
Din inegalitatea mediilor avem $\frac{x^4+1}{2}\geq\sqrt{x^4\cdot 1}\Leftrightarrow x^4+1\geq 2x^2$ și $\frac{(2y)^4+1}{2}\geq\sqrt{(2y)^4\cdot 1}\Leftrightarrow(2y)^4+1\geq 8y^2$	**2**
Adunând relațiile, avem $x^4+(2y)^4+2\geq 2x^2+8y^2\Rightarrow 8xy\geq 2x^2+8y^2\Leftrightarrow 4xy\geq x^2+4y^2\Leftrightarrow(x-2y)^2\leq 0$	**1**
Dar $(x-2y)^2\geq 0$, de unde $x=2y$	**1**
$(2y)^4+(2y)^4+2=16y^2\Leftrightarrow 16y^4-8y^2+1=0\Leftrightarrow(4y^2-1)^2=0\Leftrightarrow y\in\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$	**1**
Soluțiile ecuației sunt $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$ și $\left(1,\frac{1}{2}\right)$	**1**

Problema 3: soluție orientativă	**Punctaj**
a) Fie N mijlocul lui AD, MN linie mijlocie în $\Delta ADC\Rightarrow MN\parallel CD\Rightarrow\cos(\sphericalangle(BM,CD))=\cos(\sphericalangle(BM,MN))$	**1**
Fie $AB=x\Rightarrow BM=BN=\frac{x\sqrt{3}}{2}$ și $MN=\frac{x}{2}$	**1**
Fie P mijlocul lui MN, ΔBMN isoscel cu baza $MN\Rightarrow BP\perp MN\Rightarrow\Delta BMP$ dreptunghic în P	**1**
$MP=\frac{x}{4}$ și $\cos(\sphericalangle BMP)=\frac{\sqrt{3}}{6}$	**1**
b) Fie $MN\parallel CD, N\in AD$. Notăm $AM=y, AB=x$ ΔBMN este isoscel cu baza MN. Dacă P este mijlocul lui MN, ΔBMP este dreptunghic în P	**1**

ΔAMN este echilateral $\Rightarrow MN = y \Rightarrow MP = \frac{y}{2}$ și $\cos(\sphericalangle BMP) = \frac{y}{2BM}$	**1**
$\mathcal{A}_{ABM} = \frac{xy\sqrt{3}}{4}$, de unde $\sin(\sphericalangle ABM) = \frac{y\sqrt{3}}{2BM} \Rightarrow \frac{\cos(\sphericalangle BMP)}{\sin(\sphericalangle AMB)} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	**1**

Problema 4: soluție orientativă	**Punctaj**
a) ΔADC dreptunghic în D, $\sphericalangle DCA = 30° \Rightarrow AC = 2AD = 8$ cm. Cu teorema lui Pitagora sau $\text{tg}\,30°$, obținem $DC = 4\sqrt{3}$ cm	**1**
Fie $DE \perp AC, E \in AC \Rightarrow DE \perp (ABC)$ $DE = \frac{AD \cdot DC}{AC} = 2\sqrt{3}$. Fie $EF \perp BC, F \in DC \Rightarrow EF \parallel AD$ $DC^2 = EC \cdot AC \Rightarrow EC = 6$ cm	**1**
$\Delta CEF \sim \Delta CAB \Rightarrow EF = 3\sqrt{3}$ cm. Din T3P, $DF \perp BC \Rightarrow d(D, BC) = DF$ Din teorema lui Pitagora în $\Delta DEF, DF^2 = DE^2 + EF^2 \Rightarrow DF = \sqrt{39}$ cm	**1**
b) $\frac{FB}{BC} = \frac{1}{4} \Rightarrow FB = 1$ cm	**2**
Din teorema lui Pitagora în $\Delta BEF \Rightarrow EB^2 = BF^2 + FE^2 \Rightarrow EB = 2\sqrt{7}$ cm	**1**
ΔDEB este dreptunghic în E, de unde, cu teorema lui Pitagora $BD^2 = DE^2 + EB^2 \Rightarrow$ $BD = 2\sqrt{10}$ cm	**1**

<u>Notă:</u> Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.