9

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 11 februarie 2023
Clasa a IX – a

V3

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE şi NOTARE:

Problema 1: soluție orientativă	**Punctaj**
Fie triunghiurile $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ și punctele $A\epsilon A_1A_2, B\epsilon B_1B_2$ și $C\epsilon C_1C_2$ diferite de vârfurile triunghiurilor, astfel încât : $\frac{\overrightarrow{AA_1}}{\overrightarrow{AA_2}}=\frac{\overrightarrow{BB_1}}{\overrightarrow{BB_2}}=\frac{\overrightarrow{CC_1}}{\overrightarrow{CC_2}}$.Dacă cercurile circumscrise $\Delta ABC, \Delta A_1B_1C_1$ și $\Delta A_2B_2C_2$ sunt concentrice, să se arate că ortocentrele acestor triunghiuri sunt pe o dreaptă.	
Cercurile circumscrise $\Delta ABC, \Delta A_1B_1C_1$ *și* $\Delta A_2B_2C_2$ sunt concentrice = > au acelasi centru O	**1p**
Fie $H, H_1; H_2$ ortocentrele $\Delta ABC, \Delta A_1B_1C_1$ și $\Delta A_2B_2C_2$ Din relatia Sylvester =>$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ $\overrightarrow{OH_1}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}$ $\overrightarrow{OH_2}=\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OB_2}+\overrightarrow{OC_2}$	**2p**
$\frac{AA_1}{AA_2}=\frac{BB_1}{BB_2}=\frac{CC_1}{CC_2}=k, k>0 => \overrightarrow{OA}=\frac{1}{1+k}\overrightarrow{OA_1}+\frac{k}{k+1}\overrightarrow{OA_2};$ $\overrightarrow{OB}=\frac{1}{1+k}\overrightarrow{OB_1}+\frac{k}{k+1}\overrightarrow{OB_2}; \overrightarrow{OC}=\frac{1}{1+k}\overrightarrow{OC_1}+\frac{k}{k+1}\overrightarrow{OC_2}$	**2p**
Adunand ultimele 3 relatii de mai sus, obtinem : $\overrightarrow{OH}=\frac{1}{1+k}\overrightarrow{OH_1}+\frac{k}{k+1}\overrightarrow{OH_2}$	**1p**
Dar $\frac{1}{k+1}+\frac{k}{k+1}=1 => H; H_1; H_2\ sunt\ coliniare$	**1p**

Problema 2: soluție orientativă	**Punctaj**
Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1=1$ și $x_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\cdot x_n+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}$, $pentru\ orice\ n\geq 1$. Determinați $\left[\frac{x_n}{n^2}\right]$, $unde$ $[\cdot]$ reprezintă partea întreagă.	
$x_{n+1}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\cdot x_n+\frac{n^2+2n+1}{n^3}$ => $x_{n+1}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\cdot x_n+\frac{(n+1)^2}{n^3}$ $/:(n+1)^2$=>	**1p**

$\frac{x_{n+1}}{(n+1)^2} = \frac{x_n}{n^2} + \frac{1}{n^3}$	**1p**
Notam $a_n = \frac{x_n}{n^2} => a_1 = \frac{x_1}{1^2} = 1 => [a_1] = 1$	**1p**
Din $\frac{x_{n+1}}{(n+1)^2} = \frac{x_n}{n^2} + \frac{1}{n^3} => a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n^3}$	**1p**
$Pentru\, n = 1 => a_2 = a_1 + \frac{1}{1^3}$; $Pentru\, n = 2 => a_3 = a_2 + \frac{1}{2^3}$ $Pentru\, n = 3 => a_4 = a_3 + \frac{1}{3^3}$;......... $Pentru\, n\ \ ia\ valoarea\quad n-1 \quad => a_n = a_{n-1} + \frac{1}{(n-1)^3}$ $Pentru\, n => a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n^3}$ .Adunând aceste relații și reducând termenii asemenea, avem $a_n = a_1 + \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^3} => a_n = 1 + \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^3}$	**1p**
$k^3 = k^2 \cdot k \geq (k+1)k = k^2 + k =>$ $\frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} => \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$	**1p**
$a_n = 1 + \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^3} =>$ $=> a_n \leq 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} =>$ ⇨ $a_n \leq 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} = 2,5 - \frac{1}{n} < 3 \quad pentru \quad n \geq 2 \quad => [a_n] = 2$	**1p**
⇨ Concluzie $\quad [a_n] = \begin{cases} 1, & dacă \quad n = 1 \\ 2, & dacă \quad n \geq 2 \end{cases}$	

Problema 3: soluție orientativă	**Punctaj**
a) Fie A={ $x\epsilon Q$ / $x = \frac{n-1}{2^{n+1}}, n = \overline{1,5}$}. Să se determine cardinalul mulțimii A.	
$n = \overline{1,5} => n\epsilon\{1; 2; 3; 4; 5\}$	**1p**
$n = 1 => x = \frac{1-1}{2^{1+1}}$=0 ; $n = 2 => x = \frac{1}{8}$; $n = 3 => x = \frac{1}{8}$ $n = 4 => x = \frac{3}{32}$; $n = 5 => x = \frac{1}{16}$	**1p**
A={0; $\frac{1}{8}$; $\frac{3}{32}$; $\frac{1}{16}$} => cardA=4	**1p**
b) Să presupunem că avem un triunghi ABC și un punct $M\epsilon[BC]$ cu proprietatea $\frac{AB^2}{MC} + \frac{AC^2}{MB} \leq \frac{(AB+AC)^2}{BC}$. Să se determine poziția punctului M pe latura BC.	

Inegalitatea adevărată întotdeauna, conform inegalității Cauchy – Buniakowski – Schwartz este $\frac{AB^2}{MC}+\frac{AC^2}{MB}\geq\frac{(AB+AC)^2}{BC}$	1p
Deducem că avem relația cerută, în cazul de egalitate din relația CBS, anume: $\frac{AB}{MC}=\frac{AC}{MB}$	2p
$\frac{AB}{AC}=\frac{MC}{MB}$ => M este piciorul bisectoarei din A	1p

Problema 4: soluție orientativă	**Punctaj**
a)Arătați că $11(x+y)^2+(11x-y)^2=12(11x^2+y^2)$, pentru orice $x,y\epsilon R$ **b)** Arătați că pentru orice număr natural $n\geq 1$ există numerele natural impare x_n, y_n pentru care $11x_n^2+y_n^2=4\cdot 3^n$.	**7p**
a) $11(x+y)^2+(11x-y)^2=11(x^2+2xy+y^2)+121x^2-22xy+y^2=$ $=132x^2+12y^2=12(11x^2+y^2)$	**3p**
b) Pentru $n=2p+1$ (n impar), $p\epsilon N$ Luăm $x_n=y_n=3^p$ =>$11x_n^2+y_n^2=11x_n^2+x_n^2=12x_n^2=12(3^p)^2=$ $=4\cdot 3\cdot 3^{2p}=4\cdot 3^{2p+1}=4\cdot 3^n$	**2p**
Pentru $n=2p(n\ par), p\epsilon N^*$ Luăm $x_n=3^{p-1}$; $y_n=5\cdot 3^{p-1}$ $11x_n^2+y_n^2=11\cdot\left(3^{p-1}\right)^2+\left(5\cdot 3^{p-1}\right)^2=11\cdot 3^{2p-2}+25\cdot 3^{2p-2}=3^{2p-2}(11+25)=$ $=3^{2p-2}\cdot 36=4\cdot 3^2\cdot 3^{2p-2}=4\cdot 3^{2p}=4\cdot 3^n$	**2p**

<u>Notă:</u> Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.