Concursul Județean de matematică „Dan Barbilian"
16 decembrie 2023 – Câmpulung
Clasa a 5 – a

5/02

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE și NOTARE:

Problema 1: soluție orientativă

Oricare ar fi a un număr natural, $u(a^2)$ poate fi 0,1,4,5,6 sau 9, de unde $u(a^4)$ poate fi 0,1,5 sau 6	**2p**
$x^4 \leq 2023 \Rightarrow x < 7(7^4 = 2401; 6^4 = 1296)$	**1p**
Vom analiza cazurile: $x = 0 \Rightarrow u(y^4) = 3$ **contradicție.** $x = 1 \Rightarrow u(y^4) = 2$ **contradicție.** $x = 2 \Rightarrow u(y^4) = u(2023 - 2^4) = 7$ **contradicție.** $x = 3 \Rightarrow u(y^4) = u(2023 - 3^4) = 2$ **contradicție.** $x = 4 \Rightarrow u(y^4) = u(2023 - 4^4) = 7$ **contradicție.** $x = 5 \Rightarrow u(y^4) = u(2023 - 5^4) = 8$ **contradicție.** $x = 6 \Rightarrow u(y^4) = u(2023 - 6^4) = 7$ **contradicție.**	**3p**
Așadar nu există numere x și y care să verifice egalitatea dată	**1p**

Problema 2: soluție orientativă

a) Fie n un număr natural nenul $n \cdot (n+1) > n \cdot n = n^2$	**1p**
$n \cdot (n+1) < (n+1) \cdot (n+1) = (n+1)^2$	**1p**
Deci $n^2 < n \cdot (n+1) < (n+1)^2$, de unde concluzia că $n \cdot (n+1)$ nu este pătrat perfect	**1p**
b) Fie $S = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{2021} + 3^{2022} \Rightarrow 3S = 3 + 3^2 + \cdots + 3^{2022} + 3^{2023}$. **Scăzând cele două relații, obținem $2S = 3^{2023} - 1$**	**1p**
$x = 9^{2023} + 2S + 1 = 9^{2023} + 3^{2023}$	**1p**
$x = (3^{2023})^2 + 3^{2023} = 3^{2023} \cdot (3^{2023} + 1)$	**1p**
Cum x este produsul a două numere naturale consecutive nenule, nu este pătrat perfect	**1p**

Problema 3: soluție orientativă

Presupunem că fiecare elev ar fi adus cel mult câte două tipuri de cadouri. Rezultă că numărul maxim de cadouri care s-ar fi strâns ar fi fost $29 \cdot 2 = 58$	**2p**
Dar în total s-au strâns $19 + 23 + 21 = 63$ de cadouri	**2p**
Cum $63 - 58 = 5$	**2p**
Rezultă că cel puțin 5 elevi au adus toate tipurile de cadori	**1p**

Notă: Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.

Concursul Județean de matematică „Dan Barbilian"
16 decembrie 2023 – Câmpulung
Clasa a 6 – a

6/V2

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE și NOTARE:

Problema 1: soluție orientativă

a)

$2+4+6+\cdots+2020+2022=2\cdot\frac{1011\cdot1012}{2}=1011\cdot1012$ 1p

$\frac{1}{1\cdot3}\cdot\frac{1}{3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{2021\cdot2023}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2023}\right)=\frac{2022}{2\cdot2023}$ 1p

$A=\frac{2023}{1012}\cdot1011\cdot1012\cdot\frac{2022}{2\cdot2023}$

$A=1011^2=$ pp 1p

b)

Fie $d=(9\cdot2023^n+20,\ 4\cdot2023^n+9)$

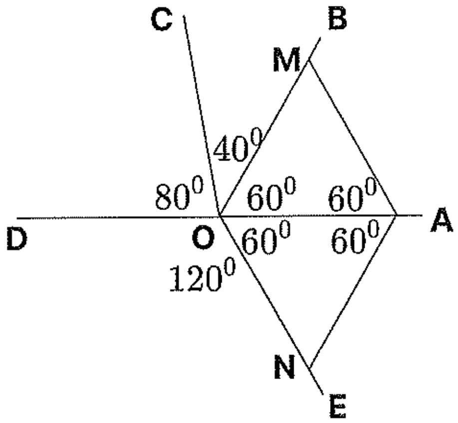
$\Rightarrow d\mid 9\cdot2023^n+20$

$d\mid\ 4\cdot2023^n+9$ 2p

$d\mid 9(4\cdot2023^n+9)-4(9\cdot2023^n+20)$ 1p

$\left.\begin{matrix} d\mid 1 \\ d\in\mathbb{N}\end{matrix}\right\}\Rightarrow d=1\Rightarrow$ nr prime între ele $\Rightarrow$ fracție ireductibilă 1p

Problema 2: soluție orientativă



a)

$\sphericalangle BOC=x$

$\widehat{AOB}=\frac{3x}{2}$

$\widehat{COD}=2x$

$\widehat{DOE}=3x$

$\widehat{EOA}=\frac{3x}{2}$ 1p

$x+\frac{3x}{2}+2x+3x+\frac{3x}{2}=360^0\ \Rightarrow x=40^0$ 1p

$\sphericalangle BOC=40^0;\ \sphericalangle AOB=60^0;\ \sphericalangle COD=80^0;\ \sphericalangle DOE=120^0;\ \sphericalangle EOA=60^0$ 1p

b)

Desenul 1p

$AM\parallel OE, OA$ secantă $\Rightarrow \sphericalangle MAO=60^0$ 1p

$AN\parallel OB, OA$ secantă $\Rightarrow\ \sphericalangle OAN=60^0$ 1p

$\sphericalangle NAM=120^0$ 1p

B-dul Eroilor nr. 4-6,
Pitești, Jud. Argeș,
Tel: +40 (0)248 218 319
Fax: +40 (0)248 219 743
www.isjarges.ro

6/V2

Str. General Berthelot nr. 28-30,
Sector 1, 010168, București
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro

Problema 3: soluție orientativă

Fie $d=(a,b)$, $a=dm, b=dn, (m,n)=1, m,n\in N^* \Rightarrow \overline{ef}^2=9\cdot d^2\cdot m\cdot(m,n)+n\cdot d^2\cdot[m,n]$ și folosind $(m,n)\cdot[m,n]=m\cdot n \Rightarrow \overline{ef}^2=d^2\cdot m\cdot(n^2+9)$.

Din $\overline{ef}^2=d^2\cdot m\cdot(n^2+9)\Rightarrow d^2\,|\,\overline{ef}^2 \Rightarrow d\,|\,\overline{ef}$ și cum $\overline{ef}$ este număr prim $\Rightarrow d\in\{1,\overline{ef}\}$.

.... **2p**

Cazul 1: Dacă $d=\overline{ef}\Rightarrow m\cdot(n^2+9)=1$, relație care nu are soluții.

Cazul 2: Dacă $d=1\Rightarrow m\cdot(n^2+9)=\overline{ef}^2 \Rightarrow m\,|\,\overline{ef}^2$ și cum $\overline{ef}$ este număr prim $\Rightarrow m\in\{1,\overline{ef},\overline{ef}^2\}$.

.... **1p**

În acest caz avem situațiile:

Cazul a: Dacă $m=\overline{ef}^2 \Rightarrow n^2+9=1$, relație care nu are soluții .

Cazul b: Dacă $m=\overline{ef}\Rightarrow\overline{ef}=n^2+9$. Cum $\overline{ef}$ este număr prim de două cifre, obținem $\overline{ef}$ este impar, deci n este par, de unde $n\in\{2,4,6,8\}$.

- dacă $n=2\Rightarrow\overline{ef}=13\Rightarrow a=13, b=2$, care verifică relația din enunț.
- dacă $n=4\Rightarrow\overline{ef}=25$, care nu este prim.
- dacă $n=6\Rightarrow\overline{ef}=45$, care nu este prim.
- dacă $n=8\Rightarrow\overline{ef}=73\Rightarrow a=73, b=8$, care verifică relația din enunț.

.... **2p**

Cazul c: Dacă $m=1\Rightarrow\overline{ef}^2=n^2+9$.

Cum $\overline{ef}$ este prim $\Rightarrow u(\overline{ef})\in\{1,3,7,9\}\Rightarrow u(\overline{ef}^2)\in\{1,9\}$, iar cum

$u(n^2)\in\{0,4,6\}\Rightarrow u(n^2+9)\in\{3,5,9\}$ (deoarece n este par). Astfel relația $\overline{ef}^2=n^2+9$ are sens doar dacă $u(\overline{ef}^2)=9$ și $u(n^2+9)=9$, adică $u(\overline{ef})\in\{3,7\}$ și $u(n)=0$.

Cum $u(n)=0\Rightarrow n=10k, k\in N^*\Rightarrow\overline{ef}^2=100k^2+9$.

Cum cel mai mic număr prim de două cifre este 11, iar cel mai mare este 97, obținem că $11^2=121$ și $97^2=9409$, atunci $k\in\{2,3,4,...,9\}\Rightarrow\overline{ef}^2\in\{409,909,1609,2509,3609,4909,6409,8109\}$. **(1)**

Dar $23^2=529, 37^2=1369, 43^2=1049, 47^2=2209, 53^2=2809, 67^2=4489, 73^2=5329,$
$83^2=6889$.

Cum aceste valori nu se găsesc în mulțimea din relația **(1),** obținem că ecuația $\overline{ef}^2=100k^2+9$ nu are soluții.

În concluzie, soluțiile problemei sunt: $\overline{ef}=13, a=13, b=2$ și $\overline{ef}=73, a=73, b=8$.

.... **2p**

<u>**Notă:**</u> Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.

B-dul Eroilor nr. 4-6,
Pitești, Jud. Argeș,
Tel: +40 (0)248 218 319
Fax: +40 (0)248 219 743
www.isjarges.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30,
Sector 1, 010168, București
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro

Concursul Județean de matematică „Dan Barbilian"
16 decembrie 2023 – Câmpulung
Clasa a 7 – a

7/V2

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE și NOTARE:

Problema 1: soluție orientativă

Fără a diminua generalitatea problemei, presupunem $x \le y \le z$.

Notăm $\begin{cases} y - x = \alpha \ge 0 \\ z - y = \beta \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = z - x \\ -(\alpha+\beta) = x - z \end{cases}$ ...2p

Inegalitatea din enunț devine

$-\alpha^{2023} \cdot [-(\alpha+\beta)]^{2023} - \alpha^{2023} \cdot \beta^{2023} + (\alpha+\beta)^{2023} \cdot \beta^{2023} \ge 0 \Leftrightarrow$ ...2p

$\Leftrightarrow [\alpha(\alpha+\beta)]^{2023} - (\alpha \cdot \beta)^{2023} + [(\alpha+\beta)\cdot\beta]^{2023} \ge 0 \Leftrightarrow$ ...1p

$\Leftrightarrow \alpha^{2023} \underbrace{[(\alpha+\beta)^{2023} - \beta^{2023}]}_{\ge 0} + (\alpha+\beta)^{2023} \cdot \beta^{2023} \ge 0$, inegalitate evidentă. ...2p

Problema 2: soluție orientativă

$\frac{1}{x} = \frac{1}{1209} - \frac{1}{y} \Rightarrow x = \frac{1209y}{y-1209}$ ...1p

$\left(\frac{x}{31} - 39\right)\left(\frac{y}{31} - 39\right) = \frac{1}{31^2}(x-1209)(y-1209) =$ ...2p

$= \frac{1}{31^2}\left(\frac{1209y}{y-1209} - 1209\right)(y-1209) =$ ...1p

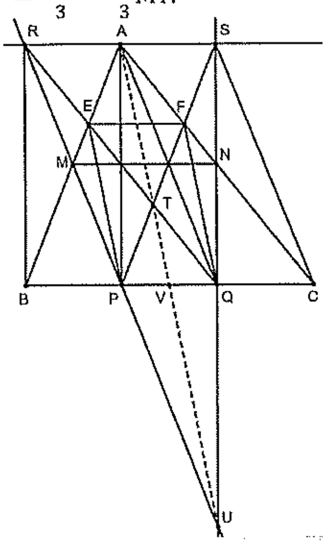
$= \left(\frac{1209}{31}\right)^2 = 39^2$ ...2p

$\sqrt{39^2} = 39, 39 \in \mathbb{N}$ ...1p

Problema 3: soluție orientativă

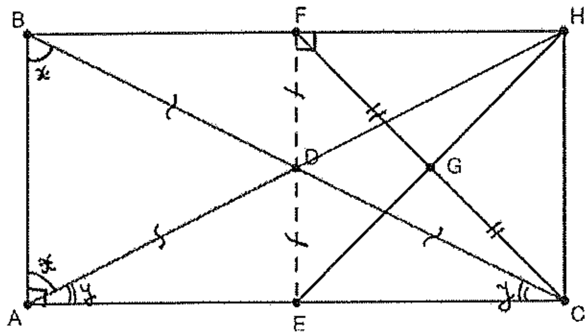
a) Se arată că BPAR și CQAS sunt paralelograme și se obține $AR = AS = \frac{BC}{3}$
$\Rightarrow$ AU este mediană în ΔSRU (1) ...1p
Se arată că ARPQ, APUQ, ASQP paralelograme $\Rightarrow$ RP ≡ PU și SQ ≡ QU
$\Rightarrow$ SP și RQ mediane în ΔSRU ...1p
Cum T ∈ PS ∩ QR $\Rightarrow$ T centrul de greutate al ΔSRU (2)
Din (1) și (2) obținem T ∈ AU ...1p
b) Din T centrul de greutate al ΔSRU $\Rightarrow AT = \frac{1}{3}AU$ (3)
Notăm $AU \cap BC = \{V\} \Rightarrow$ PV ≡ VQ (4) și AV ≡ VU (5) ...1p
Cum BP ≡ QC și din (4) $\Rightarrow$ BV ≡ CV
Din (3) și (5) $\Rightarrow AT = \frac{2}{3}AV \Rightarrow$ T centrul de greutate al ΔABC ...1p

c) P mijloc BQ și PT || BE ⇒ T mijloc EQ;
Q mijloc PC și QT || CF ⇒ T mijloc PF ...1p
⇒ EFQP paralelogram ⇒ $EF = PQ = \frac{BC}{3} = \frac{2}{3}MN$ ...1p



Problema 4: soluție orientativă

$AD \equiv BD \Rightarrow \sphericalangle DAB = \sphericalangle DBA = x$
$AD \equiv CD \Rightarrow \sphericalangle DAC = \sphericalangle DCA = y$
În triunghiul ABC, avem: $2x + 2y = 180^0$
Obținem $x + y = 90^0 \Rightarrow \sphericalangle BAC = 90^0$ ...2p
Din DE ⊥ AC, AB ⊥ AC ⇒ DE || AB și cum BD = DC ⇒ AE = EC ...1p
Din $DE = \frac{AB}{2}$ și FD = DE ⇒ FE = AB ...1p
Din FE = AB, FE || AB, $\sphericalangle BAC = 90^0$ ⇒ ABFE dreptunghi
⇒ BF = AE și BF || AE ...1p
Demonstrăm că $\Delta EGC \equiv \Delta HGF\ (ULU)$
⇒ EC = FH ⇒ ABHC dreptunghi ...1p
Din ABHC dreptunghi, BC diagonală și BD = DC,
obținem AH diagonală și AH ∩ BC = {D} ⇒ A, D, H coliniare ...1p



Notă: Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.

Concursul Județean de matematică „Dan Barbilian"
16 decembrie 2023 – Câmpulung
Clasa a 8 – a

8/V2

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE și NOTARE:

Problema 1: soluție orientativă

a) $a=\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{2}+1+3-2\sqrt{3}\Rightarrow a=4-\sqrt{3}$ **(2p)**

$b=\left(2+\sqrt{3}\right)^2-\left(2-\sqrt{3}\right)^2-7\sqrt{3}+4\Rightarrow b=4+\sqrt{3}$ **(1p)**

$m_a=4,\ m_g=\sqrt{13}$ **(1p)**

b) $n(n+1)(n+2)(n+3)+1=\left(n^2+3n\right)\left(n^2+3n+2\right)+1$ **(2p)**

$a=\sqrt{\left(n^2+3n+1\right)^2}=n^2+3n+1\in N$ **(1p)**

Problema 2: soluție orientativă

Cum $\left[\sqrt{a^2+6b}\right]\in Z\Rightarrow\sqrt{b^2+6a}\in Z\Rightarrow b^2+6a$ este pătrat perfect. **(2p)**

$\left[\sqrt{a^2+6b}\right]\le\sqrt{a^2+6b}\Rightarrow\sqrt{b^2+6a}\le\sqrt{a^2+6b}\Rightarrow b^2+6a\le a^2+6b.$ **(1p)**

$\Rightarrow(b-a)(b+a-6)\le 0$ și cum $b-a\ge 0\Rightarrow a+b\le 6.$ **(2p)**

Obținem că $(a,b)\in\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3)\}$, **(1p)**

Cum b^2+6a este pătrat perfect, convine doar $(a,b)=(2,2)$, care verifică și condiția problemei.

(1p)

Problema 3: soluție orientativă

Desfășurăm în plan fețele (VAB), (VBC), (VCD) și (VDA).

Cum $\sphericalangle AVB<45^0\Rightarrow\sphericalangle AVA'<180^0$.

În această desfășurare $AM+MN+NP+PA'$ este minimă, dacă punctele A,M,N,P,A' sunt coliniare, unde $M\in VB, N\in VC, P\in VD$. **(1p)**

Avem $AM=2\cdot MN$ **(1p)**

$VABCD$ piramidă patrulateră regulată $\Rightarrow\sphericalangle AVB\equiv\sphericalangle BVC\equiv\sphericalangle CVD\equiv\sphericalangle DVA'\Rightarrow\sphericalangle A'VC\equiv AVC$

$\Rightarrow VN$ bisectoare în triunghiul VAA'

$VA\equiv VA'\Rightarrow\Delta VA'A$ isoscel de bază $A'A$, de unde obținem că VN este înălțime $\Rightarrow VN\perp A'A$ **(1p)**

Cu teorema bisectoarei în triunghiul $VAN\Rightarrow\dfrac{VA}{VN}=\dfrac{AM}{MN}$ și cum $\dfrac{AM}{MN}=2\Rightarrow VA=2\cdot VN$ **(2p)**

Cu reciproca teoremei unghiului de 30^0 în triunghiul dreptunghic $VNA\Rightarrow\sphericalangle VAN=30^0\Rightarrow\sphericalangle AVN=60^0$ **(1p)**

Se obține că $\sphericalangle AVB=30^0$, $\sphericalangle VAB=\sphericalangle VBA=75^0$ **(1p)**

Problema 4: soluție orientativă

$a)$ KM – bisectoarea $\sphericalangle AKB \Rightarrow \frac{BK}{AK}=\frac{BM}{AM}$

KP – bisectoarea $\sphericalangle AKD \Rightarrow \frac{KD}{KA}=\frac{PD}{PA}$.

Dar $KB \equiv KD \Rightarrow \frac{BM}{AM}=\frac{PD}{PA} \overset{R.T.TH}{\Rightarrow} MP \parallel BD$ **(2p)**

$\frac{AC}{AN}-\frac{BD}{2AK} \Leftrightarrow \frac{AC}{AN}-\frac{KD}{AK}=1 \Leftrightarrow \frac{AC}{AN}=1+\frac{KD}{AK}$ și cum $\frac{KD}{KA}=\frac{PD}{PA} \Leftrightarrow \frac{AC}{AN}=1+\frac{PD}{PA} \Leftrightarrow$

$\frac{AC}{AN}=\frac{AD}{PA} \overset{R.T.Th}{\Rightarrow} PN \parallel CD$ **(1p)**

Din $MP \parallel (BCD), NP \parallel (BCD), MP, NP \subset (MNP)$ și $NP \cap MP=\{P\} \Rightarrow (MNP) \parallel (BCD)$ **(1p)**

$b)$ Din $MP \parallel BD \overset{T.Th}{\Rightarrow} \frac{AP}{PD}=\frac{AM}{MB} \Rightarrow AP \cdot MB = AM \cdot PD$.

Folosind inegalitatea mediilor

$\Rightarrow \frac{AP}{AM}+\frac{MB}{PD} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{AP}{AM}\cdot\frac{MB}{PD}}=2\cdot\sqrt{\frac{AP}{PD}\cdot\frac{PD}{AP}}=2 \Rightarrow \frac{AP}{AM}+\frac{MB}{PD} \geq 2$

$\Rightarrow AP \cdot PD + AM \cdot MB \geq 2 \cdot AM \cdot PD\ (*)$ **(1p)**

Din $PN \parallel DC \overset{T.Th}{\Rightarrow} \frac{AP}{PD}=\frac{AN}{NC} \Leftrightarrow AP \cdot NC = AN \cdot PD$.

Folosind inegalitatea mediilor $\Rightarrow \frac{AP}{AN}+\frac{NC}{PD} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{AP}{AN}\cdot\frac{NC}{PD}}=2\cdot\sqrt{\frac{AP}{PD}\cdot\frac{PD}{AP}}=2 \Rightarrow \frac{AP}{AN}+\frac{NC}{PD} \geq 2$

$\Rightarrow AP \cdot PD + AN \cdot NC \geq 2 \cdot AN \cdot PD\ (**)$ **(1p)**

Însumând relațiile $(*)$ și $(**) \Rightarrow 2 \cdot AP \cdot PD + AN \cdot NC + AM \cdot MB \geq 2 \cdot PD \cdot (AN + AM) \Leftrightarrow$

$AN \cdot NC + AM \cdot MB \geq 2 \cdot PD \cdot (AN + AM - AP)$. **(1p)**

<u>**Notă:**</u> Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.

Concursul Județean de matematică „Dan Barbilian"
16 decembrie 2023 – Câmpulung
Clasa a 9 – a

9/V2

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE și NOTARE:

Problema 1: soluție orientativă

$\overrightarrow{AM}=\frac{k}{k+1}\overrightarrow{AB}$ și analoagele 1p

$\overrightarrow{MB}=\frac{1}{k+1}\overrightarrow{AB}$ și analoagele 1p

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AU}+\overrightarrow{UV}+\overrightarrow{VE}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MU}+\overrightarrow{UV}+\overrightarrow{VQ}+\overrightarrow{QE}$ 1p

$\overrightarrow{AE}=\frac{k}{k+1}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{UV}+\frac{1}{2}\overrightarrow{NQ}+\frac{k}{k+1}\overrightarrow{DE}=\frac{k}{k+1}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DE}\right)+\overrightarrow{UV}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NQ}\right)$ 1p

$\overrightarrow{AE}=\frac{k}{k+1}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DE}\right)+\overrightarrow{UV}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DQ}\right)=$

$=\frac{k}{k+1}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DE}\right)+\overrightarrow{UV}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\frac{k}{k+1}\overrightarrow{CD}+\frac{k}{k+1}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\frac{1}{k+1}\overrightarrow{DE}\right)$ 1p

$\overrightarrow{AE}=\frac{2k+1}{2(k+1)}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}\right)+\overrightarrow{UV}=\frac{2k+1}{2(k+1)}\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{UV}\Rightarrow\frac{1}{2(k+1)}\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{UV}\Rightarrow UV\parallel AE$-1p

$\frac{1}{2(k+1)}\left|\overrightarrow{AE}\right|=\left|\overrightarrow{UV}\right|\Rightarrow AE=2(k+1)UV\Rightarrow k=2023$ 1p

Problema 2: soluție orientativă

$x=(2[x]+1)\left[\frac{5x-2}{3x+2}\right]-3$ 1p

$\Rightarrow x\in\mathbb{Z}\Rightarrow[x]=x$ 1p

Ecuația devine $\frac{x+3}{2x+1}=\left[\frac{5x-2}{3x+2}\right]$ **și cum** $\left[\frac{5x-2}{3x+2}\right]\in\mathbb{Z}\Rightarrow\frac{x+3}{2x+1}\in\mathbb{Z}$ 1p

$2x+1\mid x+3$ **și** $2x+1\mid 2x+1\Rightarrow 2x+1\mid 5$ 1p

$2x+1\in\{-5,-1,1,5\}$ 1p

$x\in\{-3,-1,0,2\}$ 1p

Verificăm valorile lui x în ecuația din enunț și obținem $x=2$ 1p

Problema 3: soluţie orientativă

Notăm $s = \frac{a}{a^2+bc+1} + \frac{b}{b^2+ca+1} + \frac{c}{c^2+ab+1}$, $a^2+1 \geq 2a, b^2+1 \geq 2b,\ c^2+1 \geq 2c$, egalitate dacă a=b=c=1 .... **1p**

$\frac{a}{a^2+bc+1} \leq \frac{a}{2a+bc}, \frac{b}{b^2+ca+1} \leq \frac{b}{2b+ca}, \frac{c}{c^2+ab+1} \leq \frac{c}{2c+ab}$ **1p**

$s \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{2a+bc} + \frac{2b}{2b+ca} + \frac{2c}{2c+ab}\right)$ **1p**

$s \leq \frac{1}{2}\left(\mathbf{1} - \frac{bc}{2a+bc} + \mathbf{1} - \frac{ca}{2b+ca} + \mathbf{1} - \frac{ab}{2c+ab}\right)$ **1p**

$s \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{(bc)^2}{2abc+(bc)^2} + \frac{(ca)^2}{2abc+(ca)^2} + \frac{(ab)^2}{2abc+(ab)^2}\right] \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(bc+ca+ab)^2}{6abc+(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2}$ **1p**

$s \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\frac{(bc+ca+ab)^2}{2abc(a+b+c)+(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2}$ **1p**

$s \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(bc+ca+ab)^2}{(bc+ca+ab)^2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \mathbf{1}$ **1p**

Problema 4: soluţie orientativă

Notăm $S_n = \frac{2}{2!} + \cdots + \frac{(n-1)^2-2}{(n-1)!} + \underbrace{\frac{n^2-2}{n!} + \frac{n+2}{n!}}$

$\frac{n^2+n}{n!} = \frac{n(n+1)}{n!} = \frac{n+1}{(n-1)!} = \frac{(n-1)+2}{(n-1)!}$ **2p**

$\Rightarrow S_n = S_{n-1}, \forall\, n \geq 3$ **2p**

$\Rightarrow S_n = S_{n-1} = \ldots = S_2, \forall\, n \geq 2$

Dar $S_2 = \frac{2}{2!} + \frac{4}{2!} = \frac{6}{2!} = 3$ **2p**

$\Rightarrow S_n = 3$ **1p**

<u>**Notă:**</u> Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.

Concursul Județean de matematică „Dan Barbilian"
16 decembrie 2023 – Câmpulung
Clasa a 10 – a

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE și NOTARE:

Problema 1 – Soluție orientativă:	**Punctaj**
Prin ridicare la pătrat relația din enunț este echivalentă cu $f_1=\frac{\log_9 14}{\log_7 11}<\frac{\log_7 12}{\log_9 14}=f_2$.	
Vom demonstra că $f_1<1$ și $f_2>1$. (R_1)	1p
Cum $f_1=\dfrac{\log_9 14}{\log_7 11}$, facem observația: $\log_{\frac{14}{9}} 7<\log_{\frac{14}{9}} 9 \Leftrightarrow \log_7 \dfrac{14}{9}>\log_9 \dfrac{14}{9}$ (R_2).	1p
Dar $\dfrac{14}{9}<\dfrac{11}{7} \Rightarrow \log_7 \dfrac{14}{9}<\log_7 \dfrac{11}{7}$ și folosind (R_2) obținem	1p
$\log_9 \dfrac{14}{9}<\log_7 \dfrac{14}{9}<\log_7 \dfrac{11}{7} \Leftrightarrow \log_9 14-1<\log_7 11-1 \Rightarrow \log_9 14<\log_7 11 \Rightarrow$ $f_1=\frac{\log_9 14}{\log_7 11}<1$ și prima inegalitate din (R_1) este demonstrată.	1p
Pentru a doua inegalitate din (R_1) observăm $\dfrac{12}{7}>\dfrac{14}{9} \Leftrightarrow \log_7 \dfrac{14}{9}<\log_7 \dfrac{12}{7} \Leftrightarrow \log_{\frac{14}{9}} 7>\log_{\frac{12}{7}} 7$ și (R_2) se completează	1p
$\log_7 \dfrac{12}{7}>\log_7 \dfrac{14}{9}>\log_9 \dfrac{14}{9} \Leftrightarrow \log_7 12-1>\log_9 14-1 \Rightarrow \log_7 12>\log_9 14 \Rightarrow$	1p
$\Rightarrow f_2=\dfrac{\log_7 12}{\log_9 14}>1$ și problema este demonstrată.	1p

Problema 2 – Soluție orientativă:	**Punctaj**
Soluție:	1p
Notez g :R→R , $g(x)=x^{2023}$ și $(\underbrace{f\circ f\circ f\circ \dots\circ f}_{de\ 2020\ de\ ori})(x)=f_{2020}(x)$	2p
Compunând la dreapta și la stânga cu „f" relația $f_{2020}(x)=g(x)$, obținem $f_{2021}(x)=f(x)^{2023}$, respectiv $f_{2021}(x)=f(x^{2023})$ și rezultă $f(x)^{2023}=f(x^{2023})$.	2p
Înlocuind x=1 obținem $f(1)^{2023}=f(1)$ cu soluțiile -1, 0, 1.Deci $f(1)\in\{-1,0,1\}$. Analog $f(0)\in\{-1,0,1\}$ și $f(-1)\in\{-1,0,1\}$.	
Funcția g este injectivă, f_{2020} este injectivă, deci f este injectivă și monotonă⟹strict monotonă ⇒$(f(-1),f(0),f(1))$ = (-1, 0, 1) sau (1, 0, - 1). În concluzie E=0.	2p

Problema 3 – Soluție orientativă:	Punctaj
a) Aplicăm formula produsului sumei prin diferență de mai multe ori	
$$(a-bi)(a+bi)=a^2-b^2i^2$$	1p
$$(a^2-b^2i^2)(a^2+b^2i^2)=a^4-b^4i^4$$	2p
$$z=a^{64}-b^{64}i^{64}=a^{64}-b^{64}\epsilon R$$	
b) $\lvert z-3-4i\rvert=\lvert x+2i-3-4i\rvert=\lvert x-3-2i\rvert=$	1p
$=\sqrt{(x-3)^2+(-2)^2}=\sqrt{(x-3)^2+4}\geq\sqrt{0+4}=2$	2p
Egalitate avem cand $x-3=0\Rightarrow x=3$	1p

Problema 4 – Soluție orientativă:	Punctaj
$a,b,c>1=>log_ab>log_a1=0$ (baze supraunitare)	
Aplicăm inegalitatea Titu Andreescu generalizată	
$\frac{log_bc}{b+c-a}+\frac{log_ca}{a+c-b}+\frac{log_ab}{a+b-c}=\frac{\sqrt{log_bc}^2}{b+c-a}+\frac{\sqrt{log_ca}^2}{a+c-b}+\frac{\sqrt{log_ab}^2}{a+b-c}\geq$	1p
$\geq\frac{\left(\sqrt{log_bc}+\sqrt{log_ca}+\sqrt{log_ab}\right)^2}{a+b+c}$ (*)	1p
Aplicăm inegalitatea mediilor $\frac{x+y+z}{3}\geq\sqrt[3]{xyz}<=>x+y+z\geq3\sqrt[3]{xyz}$	1p
$\sqrt{log_bc}+\sqrt{log_ca}+\sqrt{log_ab}\geq3\sqrt[3]{\sqrt{log_bc}\cdot\sqrt{log_ca}\cdot\sqrt{log_ab}}=$	1p
$=3\sqrt[6]{log_bc\cdot log_ca\cdot log_ab}=3\sqrt[6]{\frac{lnc}{lnb}\cdot\frac{lna}{lnc}\cdot\frac{lnb}{lna}}=3\sqrt[6]{1}=3$	2p
Înlocuind în relația (*) avem	
$\frac{log_bc}{b+c-a}+\frac{log_ca}{a+c-b}+\frac{log_ab}{a+b-c}\geq\frac{\left(\sqrt{log_bc}+\sqrt{log_ca}+\sqrt{log_ab}\right)^2}{a+b+c}\geq\frac{3^2}{a+b+c}=\frac{9}{a+b+c}$	1p

<u>Notă:</u> Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.

Concursul Județean de matematică „Dan Barbilian"
16 decembrie 2023 – Câmpulung
Clasa a 11 – a

11/02

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE și NOTARE:

Problema 1: soluție orientativă

a) Se observă că $Tr(A)=8$ și $\det(A)=7$. Din relația lui H.C. $\Rightarrow A^2=8A-7I_2$.
Fie $X(a),X(b)\in G\Rightarrow X(b)\cdot X(b)=(a\cdot A+(1-a)\cdot I_2)(b\cdot A+(1-b)\cdot I_2)=abA^2+$
$+\big(a(1-b)+b(1-a)\big)A+(1-a)(1-b)I_2=(6ab+a+b)A+\big(1-(6ab+a+b)\big)I_2=$
$=cA+(1-c)I_2=X(c)\in G$, unde $c=6ab+a+b\in\mathbb{R}$ .... 2 p
Cum $6ab+a+b=6\left(a+\frac{1}{6}\right)\left(b+\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{6}$, pentru orice $a,b\in\mathbb{R}$, atunci
$X(a)\cdot X(b)=X\left(6\left(a+\frac{1}{6}\right)\left(b+\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{6}\right)\in G$, pentru orice matrice $X(a),X(b)\in G$ .... 1 p

b) $X(a)\cdot X\left(-\frac{1}{6}\right)=X\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot X(a)=X\left(-\frac{1}{6}\right)$, pentru orice $X(a)\in G$ .... 1 p
Deci $X\left(\frac{-2023}{6}\right)\cdot X\left(\frac{-2021}{6}\right)\cdot\ldots\cdot X\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot\ldots\cdot X\left(\frac{2021}{6}\right)\cdot X\left(\frac{2023}{6}\right)=X\left(-\frac{1}{6}\right)$ .... 1 p

c) $X^2(a)=X(a)\cdot X(a)=X\left(6\left(a+\frac{1}{6}\right)^2-\frac{1}{6}\right)$
$X^3(a)=X^2(a)\cdot X(a)=X\left(6\left(a+\frac{1}{6}\right)^2-\frac{1}{6}\right)\cdot X(a)=X\left(6^2\left(a+\frac{1}{6}\right)^3-\frac{1}{6}\right)$ .... 1 p
Conform inducției matematice $X^n(a)=X\left(6^{n-1}\left(a+\frac{1}{6}\right)^n-\frac{1}{6}\right),n\in\mathbb{N}^*$ .... 1 p

Problema 2: soluție orientativă

Notăm $X\in M_3(\mathbb{Z}),X=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}$ și $E=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$.

$X\cdot/\ X^{2023}=E\ /\cdot X\Rightarrow X^{2024}=XE=EX$. .... 1 p
Prin calcul se obține $X=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}=M(a,b,c)$, cu $a,b,c\in\mathbb{Z}$ .... 1 p

Prin inducție obținem $\big(M(a,b,c)\big)^n=M(a_n,b_n,c_n)$ cu $a_n+b_n+c_n=(a+b+c)^n,n\in\mathbb{N}^*$
$\Rightarrow a_{2023}+b_{2023}+c_{2023}=1=(a+b+c)^{2023}\Rightarrow a+b+c=1$ .... 1 p

Din $X^{2023}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow det(X^{2023})=detE\Rightarrow(\det(X))^{2023}=1\Rightarrow\det(X)=1$ .... 1 p
Dar $\det(X)=a^3+b^3+c^3-3abc=1\Rightarrow(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)=1$
$\Rightarrow a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=1\ /\cdot 2\Rightarrow(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2=2$ .... 2 p
$\Rightarrow$ unul dintre termeni este 0, iar ceilalți doi sunt egali cu 1. Analizând cele 6 situații posibile $a=b,b-c=1,a-c=-1$ și analoagele și folosind $a+b+c=1\Rightarrow X\in\{I_3;E;E^2\}$, iar prin verificare doar $X=E$ satisface ecuația din enunț .... 1 p

Problema 3: soluţie orientativă

Notăm

$$a_n = \sum_{1\le i<j\le n} \frac{1}{i\cdot j}, n \ge 2$$

Atunci $a_n - a_{n-1} = \frac{1}{1\cdot n} + \frac{1}{2\cdot n} + \frac{1}{3\cdot n} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} = \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)$ 1p

Aplicând Lema Stolz-Cesaro $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{\ln^2 n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n - a_{n-1}}{(\ln n)^2 - (\ln(n-1))^2} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)}{\ln(n\cdot(n-1))\cdot\ln\frac{n}{n-1}} \ (*)$$

....1p

Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\ln\frac{n}{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\ln e} = 1 \ (R_1)$

....2p

iar $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\overbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}}^{x_n}}{\ln(n\cdot(n-1))} \overset{\text{Stolz-Cesaro}}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{\ln(n\cdot(n-1)) - \ln((n-1)(n-2))} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n-1}}{\ln\frac{n}{n-2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln\left(1+\frac{2}{n-2}\right)^{n-1}} = \frac{1}{\ln e^2} = \frac{1}{2} \ (R_2)$$

....2p

$\overset{(*)}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{\ln^2 n} = 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$ 1p

Problema 4: soluţie orientativă

Cum

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^\alpha + 2^\alpha + 3^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha+1}, \alpha > 0 \Rightarrow$$

....1 p

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{1}{3}} + \cdots + n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{4}{3}}} = \frac{3}{4}$$

....2 p

Deci rămâne de calculat

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{(n+1)^3+1} - \sqrt[3]{n^3+1}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 + 1 - n^3 - 1}{\sqrt[3]{(n+1)^3+1}^2 + \sqrt[3]{(n+1)^3+1}\cdot\sqrt[3]{n^3+1} + \sqrt[3]{n^3+1}^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 3n + 1}{\sqrt[3]{(n+1)^3+1}^2 + \sqrt[3]{(n+1)^3+1}\cdot\sqrt[3]{n^3+1} + \sqrt[3]{n^3+1}^2} = 1$$

Deci limita cerută este $\frac{3}{4}\cdot 1 = \frac{3}{4}$..4 p

Notă: Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.

Concursul Judeţean de matematică „Dan Barbilian"
16 decembrie 2023 – Câmpulung
Clasa a 12 – a

12/02

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE şi NOTARE:

Problema 1 (G.M. 9/2023, autor Cezar Apostolescu, Ploieşti)

$F'(x)=f(x)=\frac{1}{xe^x}>0,\ \forall x>0,$ rezultă F strict crescătoare şi există $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x)$. **2p**

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{xe^xF(x)}{xe^x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\left(xe^xF(x)\right)'}{\left(xe^x\right)'}$ (cazul $\frac{0}{0}$, l'Hospital) **2p**

Dacă $l=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x)\in\mathbb{R}$, se obţine $l=1\to l$, absurd. **2p**

Deoarece F este strict crescătoare, rezultă că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x)=-\infty$. **1p**

Problema 2

Fie F_1 o primitivă a lui f pe $[a,c]$, F_2 o primitivă a lui f pe $[c,b]$ şi $F(x)=\begin{cases}F_1(x)+C_1, & x\in[a,c]\\ k, & x=c\\ F_2(x)+C_2, & x\in[c,b]\end{cases}$ **3p**

Punând condiţia ca F să fie continuă, se obţine $F_1(c)+C_1=k,\ F_2(c)+C_2=k$. **2p**

Cu $C_1=k-F_1(c),\ C_2=k-F_2(c),\ k\in\mathbb{R}$ se obţine că F este şi derivabilă şi $F'(x)=f(x)$. **2p**

Problema 3

Fie $a,\ b\in M$, astfel încât $ab=e$ şi $f:M\to M,\ f(x)=bx$. **2p**

Se arată că f este injectivă şi cum M este finită, rezultă f surjectivă. **3p**

Prin urmare, există $c\in M$, astfel încât $bc=e$. Rezultă $a(bc)=a$ şi $(ab)c=a$, care duce la $c=a$, deci $ba=e$. **2p**

Problema 4 (autor Marin Ionescu, Piteşti)

Se ştie că dacă $f:G_1\to G_2$ este morfism de grupuri, atunci $\operatorname{Im} f=\{f(x)\mid x\in G_1\}$ este subgrup în G_2. Cum f este morfism injectiv, avem $|G_1|=|\operatorname{Im} f|=m$. Folosind teorema lui Lagrange avem $\operatorname{ord}\operatorname{Im} f\mid\operatorname{ord} G_2$, deci $m\mid n$. **2p**

Vom arăta că m este un număr prim. Presupunem prin metoda reducerii la absurd contrariul. Deci există p prim astfel încât $p\mid m,\ p\neq m$. **1p**

Deoarece G_1 este grup ciclic cu m elemente, există $x\in G_1\setminus\{e_1\}$ astfel încât $G_1=\{e_1,\ x,\ x^2,\dots,\ x^{m-1}\}$, unde e_1 este elementul neutru al grupului G_1. Dacă $f(x)=y,\ y\in G_2$, iar f este morfism injectiv, rezultă $\{e_2,\ y,\ y^2,\dots,\ y^{m-1}\}=\operatorname{Im} f\subset G_2$, unde e_2 este elementul neutru al grupului G_2. **1p**

$f_p : G_1 \to G_2,\ f_p(a) = (f(a))^p$ este şi el morfism de grupuri.

Într-adevăr, deoarece grupurile ciclice G_1, G_2 sunt comutative, putem scrie:

$f_p(ab) = (f(ab))^p = (f(a)\cdot f(b))^p = (f(a))^p \cdot (f(b))^p = f_p(a)\cdot f_p(b),\ \forall a, b \in G_1.$ **1p**

Deoarece f_p este morfism, avem, $f_p(a) = f(a^p),\ \forall a \in G_1$ (*). **1p**

Dacă $p|m$ şi p este număr prim, din teorema lui Cauchy rezultă că există $a \in G_1$, cu $\text{ord}\,a = p$. Deci $a \neq e_1$ şi $a^p = e_1$. Din (*) rezultă $f_p(a) = f(a^p) = f(e_1) = f_p(e_1)$, contradicţie cu faptul că f_p este injectivă.

Deci, presupunerea făcută este falsă şi rezultă că m este număr prim. **1p**

<u>Notă:</u> Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.