5

Concursul Județean de matematică „Dan Barbilian”
16 decembrie 2023 – Câmpulung
Clasa a 5 – a

SUBIECTE:

1. Există numere naturale x, y astfel încât $x^4 + y^4 = 2023$? Justificați

(7p)

2. a) Demonstrați că produsul a două numere naturale consecutive nenule nu este pătrat perfect

(3p)

b) Fie $x = 9^{2023} + 2 \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{2022}) + 1$. Arătați că x nu este pătrat perfect

(4p)

3. Înainte de Crăciun, cei 29 de elevi ai clasei a V-a au adus pentru colegii lor din clasele primare trei tipuri de cadouri: cărți, jucării de pluș și cutii de bomboane. Au adus cărți 19 dintre elevi, jucării de pluș 23 dintre elevi, iar cutii de bomboane 21 dintre ei.
Să se arate că cel puțin 5 elevi au adus toate tipurile de cadouri (și cărți, și jucării de pluș, și cutii de bomboane).

(7p)

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.
Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.
Timp de lucru: 2 ore.

6

Concursul Județean de matematică „Dan Barbilian"
16 decembrie 2023 – Câmpulung
Clasa a 6 – a

SUBIECTE:

1. a) Demonstrați că numărul: $A = \frac{2023}{1012} \cdot (2 + 4 + 6 + \cdots + 2020 + 2022) \cdot \left(\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{2021\cdot 2023}\right)$ este un pătrat perfect.

(3p)

b) Arătați că fracția $\frac{9\cdot 2023^n + 20}{4\cdot 2023^n + 9}$ este ireductibilă, pentru orice număr natural n.

(4p)

2. Considerăm unghiurile în jurul unui punct $\widehat{AOB}, \widehat{BOC}, \widehat{COD}, \widehat{DOE}$, respectiv $\widehat{EOA}$. Măsurile unghiurilor verifică condițiile $\sphericalangle BOC = \frac{2}{3}\widehat{AOB} = \frac{1}{2}\widehat{COD} = \frac{1}{3}\widehat{DOE}$, iar semidreapta OA este bisectoarea unghiului $\widehat{BOE}$.

a) Aflați măsurile unghiurilor $\widehat{AOB}, \widehat{BOC}, \widehat{COD}, \widehat{DOE}$ și $\widehat{EOA}$.

(3p)

b) Fie $AM \parallel OE$, M aparține semidreptei OB, iar $AN \parallel OB$, N aparține semidreptei OE. Calculați măsura $\sphericalangle NAM$.

(4p)

3. Determinați numerele naturale prime de forma $\overline{ef}$ și numerele naturale nenule a, b care verifică egalitatea $\overline{ef}^2 = 9 \cdot a \cdot (a, b) + b \cdot [a, b]$, unde (x, y) reprezintă cel mai mare divizor comun al numerelor naturale x, y, iar $[x, y]$ reprezintă cel mai mic multiplu comun al numerelor x, y.

(7p)

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.
Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.
Timp de lucru: 2 ore.

7

Concursul Județean de matematică „Dan Barbilian"
16 decembrie 2023 – Câmpulung
Clasa a 7 – a

SUBIECTE:

1. Demonstrați că

$$(x-y)^{2023}(x-z)^{2023}+(y-x)^{2023}(y-z)^{2023}+(z-x)^{2023}(z-y)^{2023}\geq 0,\ \forall\, x,\ y,\ z\in\mathbb{R}.$$

(7p)

2. Fie $x, y \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{1209}$. Arătați că $\sqrt{\left(\frac{x}{31}-39\right)\left(\frac{y}{31}-39\right)}\in\mathbb{N}$. **(7p)**

3. Fie M și N mijloacele laturilor AB și respectiv AC ale unui triunghi ABC și punctele P și Q situate pe latura BC astfel încât $BP \equiv PQ \equiv QC$. Paralela prin A la BC intersectează dreptele PM și QN în punctele R, respectiv S. Dacă $T \in PS \cap QR$, $U \in PR \cap QS$, $E \in QR \cap AB$, $F \in PS \cap AC$, demonstrați că:

a) $T \in AU$; **(3p)**

b) T este centrul de greutate al triunghiului ABC; **(2p)**

c) $EF = \frac{2}{3}MN$. **(2p)**

4. În triunghiul ABC, D este mijlocul segmentului BC și $2AD = BC$. Fie $DE \perp AC$, $E \in AC$, F simetricul lui E față de punctul D, G mijlocul segmentului FC și $BF \cap EG = \{H\}$.
Demonstrați că punctele A, D, H sunt coliniare. **(7p)**

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.
Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.
Timp de lucru: 3 ore.

B-dul Eroilor nr. 4-6,
Pitești, Jud. Argeș,
Tel: +40 (0)248 218 319
Fax: +40 (0)248 219 743
www.isjarges.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30,
Sector 1, 010168, București
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro

8

Concursul Județean de matematică „Dan Barbilian”
16 decembrie 2023 – Câmpulung
Clasa a 8 – a

SUBIECTE:

1. a) Fie numerele $a=\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}-\sqrt{21-12\sqrt{3}}$ și $b=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}-\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}-\left(7\sqrt{3}-4\right)$

Calculați media aritmetică și media geometrică a numerelor a și b. **(4p)**

b) Arătați că numărul $a=\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1}$ este natural, oricare ar fi $n\in N$. **(3p)**

2. Aflați numerele naturale nenule $a, b,$ unde $a\le b$, știind că $\left[\sqrt{a^2+6b}\right]=\sqrt{b^2+6a}$, unde prin $[x]$ s-a notat partea întreagă a numărului real x. **(7p)**

3. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu $\sphericalangle AVB<45^0$. O furnică pleacă din punctul A și ajunge tot în punctul A, mergând pe toate fețele laterale. Știind că lungimea drumului parcurs este minimă și că lungimea parcursă pe fața VAB este de două ori mai mare decât cea parcursă pe fața VBC, determinați măsurile unghiurilor feței VAB.

Supliment Gazeta Matematică-Octombrie 2023(enunț modificat)
(7p)

4. Fie punctele necoplanare A, B, C și D. Considerăm K mijlocul segmentului BD, KM bisectoarea unghiului AKB, $M\in AB$, KP bisectoarea unghiului AKD, $P\in AD$, iar N un punct pe muchia AC, astfel încât $\dfrac{AC}{AN}-\dfrac{BD}{2AK}=1$.

a) Arătați că planele (MNP) și (BCD) sunt paralele. **(4p)**

b) Demonstrați că: $AN\cdot NC+AM\cdot MB\ge 2PD\cdot(AN+AM-AP)$. **(3p)**

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.
Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.
*Timp de lucru: **3 ore**.*

9

Concursul Județean de matematică „Dan Barbilian”
16 decembrie 2023 – Câmpulung
Clasa a 9 – a

SUBIECTE:

1. Pe laturile pentagonului ABCDE se iau punctele M∈(AB), N∈(BC), P∈(CD), Q∈(ED) astfel încât

$$\frac{AM}{MB}=\frac{CN}{NB}=\frac{CP}{PD}=\frac{EQ}{QD}=k,\ k>0$$

Notăm cu U și V mijloacele segmentelor (MP), respectiv (NQ). Arătați că UV || AE și determinați k pentru care $AE = 4048UV$. **(7p)**

2. Să se rezolve în ℝ ecuația:

$$\frac{x+3}{2[x]+1}=\left[\frac{5x-2}{3x+2}\right],$$ **(7p)**

unde [a] reprezinta partea întreagă a numărului real a.

3. Fie a,b,c>0 pentru care a + b + c = 3. Arătați că

$$\frac{a}{a^2+bc+1}+\frac{b}{b^2+ca+1}+\frac{c}{c^2+ab+1}\le 1.$$ **(7p)**

4. Calculați suma: $S_n=\frac{2}{2!}+\frac{7}{3!}+\ldots+\frac{n^2-2}{n!}+\frac{n+2}{n!}$, unde $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ **(7p)**

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.
Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.
*Timp de lucru: **3 ore**.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN ARGEŞ

MINISTERUL EDUCAŢIEI

10

Concursul Judeţean de matematică „Dan Barbilian”
16 decembrie 2023 – Câmpulung
Clasa a 10 – a

SUBIECTE:

1. Demonstrați că $\log_9 14 < \sqrt{(\log_7 11)\cdot(\log_7 12)}$ fără a utiliza tabelele de logaritmi.

(7p)

2. Dacă f :R→R este o funcție monotonă cu proprietatea $\underbrace{(f \circ f \circ f \circ \ldots . \circ f)}_{de\ 2020\ de\ ori\ f}(x) = x^{2023}$,

$(\forall)x \in R$, calculați valoarea expresiei $E = f(-1) + f(0) + f(1)$.

(7p)

3. a) Să se arate că numărul $z = (a - bi)(a + bi)(a^2 + b^2 i^2)(a^4 + b^4 i^4) \ldots (a^{32} + b^{32} i^{32})$ este număr real, oricare ar fi $a, b \epsilon R$.

(3p)

b) Să se determine $x \epsilon R$ astfel încat $z = x + 2i$ are proprietatea că $|z - 3 - 4i|$ este minim.

(4p)

4. Numerele reale $a, b, c > 1$ sunt lungimile laturilor unui triunghi. Arătați că :
$\frac{log_b c}{b+c-a} + \frac{log_c a}{a+c-b} + \frac{log_a b}{a+b-c} \geq \frac{9}{a+b+c}$.

(7p)

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.
Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.
*Timp de lucru: **3 ore**.*

B-dul Eroilor nr. 4-6,
Piteşti, Jud. Argeş,
Tel: +40 (0)248 218 319
Fax: +40 (0)248 219 743
www.isjarges.ro

10/02

Str. General Berthelot nr. 28-30,
Sector 1, 010168, Bucureşti
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro

11

Concursul Județean de matematică „Dan Barbilian”
16 decembrie 2023–Câmpulung
Clasa a 11 – a

SUBIECTE:

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 17-9\sqrt{3} & 8-\sqrt{3} \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \{X(a) = a \cdot A + (1-a) \cdot I_2 \mid a \in \mathbb{R}\}$.

a) Arătați că $X(a) \cdot X(b) \in G$, pentru orice $X(a), X(b) \in G$. **(3 p)**

b) Calculați $X\left(\frac{-2023}{6}\right) \cdot X\left(\frac{-2021}{6}\right) \cdot \ldots \cdot X\left(\frac{2021}{6}\right) \cdot X\left(\frac{2023}{6}\right)$. **(2 p)**

c) Calculați $X^n(a), n \in \mathbb{N}^*$. **(2 p)**

2. Să se rezolve în mulțimea $M_3(\mathbb{Z})$ ecuația:

$$X^{2023} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(7 p)

3. Calculați

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\ln n)^2} \cdot \sum_{1\le i<j\le n} \frac{1}{i \cdot j}$$

(7 p)

4. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[3]{n}}{n \cdot \sqrt[3]{n} \cdot \left(\sqrt[3]{(n+1)^3+1} - \sqrt[3]{n^3+1}\right)}$$

(7 p)

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.
Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.
Timp de lucru: 3 ore.

12

Concursul Județean de matematică „Dan Barbilian”
16 decembrie 2023 – Câmpulung
Clasa a 12 – a

SUBIECTE:

1. Fie $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcției $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{xe^x}$. Calculați $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x)$. **(7p)**

2. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ și $c\in[a,b]$. Se presupune că f admite primitive pe $[a,c]$ și pe $[c,b]$. Să se arate că f admite primitive pe $[a,b]$. **(7p)**

3. Fie $(M,\cdot)$ un monoid finit și „e“ elementul său neutru. Să se demonstreze că dacă există $a, b\in M$, astfel încât $ab=e$, atunci $ba=e$. **(7p)**

4. Fie $m, n\in\mathbb{N}$, $m, n\geq 2$ și G_1, respectiv G_2 două grupuri ciclice cu m, respectiv n elemente. Să se arate că dacă există un morfism injectiv $f:G_1\to G_2$ astfel încât pentru orice $r\in\{1, 2, ..., m-1\}$, $f_r:G_1\to G_2$, $f_r(x)=(f(x))^r$ este funcție injectivă, atunci $m|n$ și m este număr prim.
(Se poate folosi faptul că dacă p e număr prim și $p|m$, atunci există $a\in G_1$ cu ord $a=p$.)

(7p)

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.
Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.
*Timp de lucru: **3 ore**.*